Устойчивые соединения (stable matching): теория, наблюдения и практическое конструирование

В 1962 году Шепли небольшой статье совместно с Дэвидом Гейлом (David Gale) он рассмотрел задачу попарного соединения (pairwise matching): как люди могут объединяться парами, если у каждого из них свои предпочтения, кто был бы его лучшим партнером. Гейл и Шепли проанализировали выбор партнера на общем абстрактном уровне. Как одну из иллюстрации они использовали выбор супруга. Каким образом десять женщин и десять мужчин должны соединиться, учитывая предпочтения каждого?

Алгоритм Гейла-Шепли может быть организован двумя способами: или мужчины делают предложения женщинам, или же женщины мужчинам. Во втором случае процесс начинается с того, что каждая женщина делает предложение тому мужчине, который ей нравится больше всех. Каждый мужчина после этого выбирает из нескольких предложений, которые он (возможно) получил, то предложение, которое его устраивает больше всего, и отвечает отказом на все остальные. Но он пока не принимает это лучшее предложение, а откладывает и запоминает его. Женщины, которые были отвергнуты в первом раунде, делают новые предложения тем из оставшихся мужчин, кто им нравится больше всего (second-best choices), а мужчины снова запоминают самое лучшее предложение и отказываются от остальных. Это продолжается до тех пор, пока женщины не перестанут делать предложения, после этого мужчины окончательно принимают те предложения, которые они отложили, и процесс заканчивается. Гейл и Шепли доказали, что этот алгоритм всегда приводит к устойчивому парному соединению.

Оказалось, что конкретная форма алгоритма имеет большое значение, результат распределения сильно меняется в зависимости от того, кто имеет право делать предложения – мужчины или женщины. Если, как в примере, предложения делают женщины, результат оказывается более выгодным для них – в этом случае, по сравнению с тем, когда первыми выбирают мужчины, некоторые женщины получают партнера, который им нравится больше, и ни одна женщина не проигрывает. Соответственно, если предложения делают мужчины, больше выигрывают они.

Ясная и элегантная статья Гейла-Шепли включена в списки литературы для студентов-экономистов во всем мире. Но ее практическое значение долгое время не было осознано, пока в начале 1980 годов Элвин Рот не столкнулся с практической задачей распределения – рынком для только что получивших дипломы врачей.

В США студенты-медики, которые заканчивают учиться, обычно становятся интернами в больницах, где они составляют значительную часть персонала.

В начале 1990 годов этот рынок был сильно децентрализован. В 1940 годах конкуренция за студентов-медиков заставила больницы предлагать места интернов на все более ранних этапах обучения, иногда даже за несколько лет до окончания обучения. Соединения (matches) происходили раньше, чем студенты могли продемонстрировать свидетельство своей квалификации, и даже раньше, чем они выбирали для себя медицинскую специальность. Когда же предложение отклонялось, часто было слишком поздно обращаться к другим кандидатам. Такой проблемный рынок не может порождать устойчивых соединений, поскольку не хватает времени, чтобы сделать достаточно много предложений и обеспечить взаимно полезные сделки. Чтобы сделать как можно больше предложений, больницы вводили жесткие временные ограничения для ответов на предложения. Это, в свою очередь, заставляло студентов рано принимать решения, не зная, какие другие возможности могут возникнуть впоследствии.

Как ответ на эти проблемы, в начале 1950 годов возникла централизованная «биржа» под названием Национальная программа распределения интернов (National Resident Matching Program, NRMP). В статье 1984 года Элвин Рот проанализировал алгоритм, используемый этой биржей, и обнаружил, что он был очень похож на алгоритм Гейла-Шепли. Он предположил, что фундаментальная причина успеха NRMP состояла в том, что эта биржа порождала устойчивые соединения. В начале 1990 годов Рот изучил аналогичные медицинские рынки в Великобритании. Оказалось, что различные регионы там использовали разные алгоритмы, из которых некоторые порождали устойчивые соединения, а другие нет. Те, которые приводили к устойчивым соединениям, были успешными, другие же прекращали существование по разным причинам.

Алгоритм Гейла-Шепли оказался полезным и для других приложений, таких как выбор школы. До 2003 года поступающие в государственные школы (public high schools) города Нью-Йорка должны были указать пять школ, которые они предпочитают, после чего эту информацию сообщали школам. Школы после этого принимали решение, кого принять сразу, кому отказать, а кого включить в список ожидающих решения. Этот процесс повторялся еще два раунда, а всех оставшихся и еще никуда не зачисленных распределяли по школам путем принятия административного решения. Это, однако, не давало достаточно возможностей поступающим высказать свои предпочтения, а школам – самим сделать предложения. В результате примерно 30 тысяч поступающих оказывались в школах, которые они не указывали в своих заявках. Более того, такая процедура создавала возможности для искажения предпочтений. Поскольку школы в первую очередь принимали тех, кто, кто ставил их на первое место, поступающие, которые не надеялись попасть туда, куда бы они хотели, указывали в качестве своего самого предпочтительного варианта более реалистичные варианты. Те же, кто просто сообщал о своих настоящих предпочтениях, проигрывали. В 2003 году Рот и его коллеги помогли реконструировать эту процедуру приема на основе варианта алгоритма Гейла-Шепли, где заявки подают поступающие. Новый алгоритм оказался успешным, и число поступающих, оказавшихся в школах, куда они не подавали заявку, сократился на 90 процентов. Сегодня все большее число городских территорий используют какой-либо вариант алгоритма Гейла-Шепли.

Описанные выше ситуации поиска соответствия предполагают две стороны, которые обе принимают решения. Некоторые реальные ситуации –односторонние в том смысле, что вторая сторона играет пассивную роль. Практическим примером может служить поиск подходящих почек и других человеческих органов для трансплантации.

Эту проблему исследовали Шепли и его коллеги, опять-таки в абстрактной форме на основе идеи устойчивости. Предложенный алгоритм - так называемый *top trading cycle* *(TTC)* – на самом деле очень прост. Он основан на первоначальном распределении объектов и последующих обменах. Применительно к человеческим органам задача состоит в том, что некоторые пары донора и пациента (рецепиента) могут оказаться несовместимыми, а множественные обмены – занимать много времени. Как и раньше, на основе соединения теории и экспериментальной работы было проведено сравнение различных вариантов алгоритма *top trading*. Как результат, в ряде штатов США внедрены сложные системы использования донорских почек.

Алгоритм Гейла-Шепли допускает применения и к другим ситуациям. Данное направление исследований продолжает расти и выглядит очень перспективным.