АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

*На правах рукописи*

ШИРОНИН Вячеслав Михайлович

# О РАСПОЛОЖЕНИИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТОЧЕК В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

01.01.09 — математическая кибернетика

***АВТОРЕФЕРАТ***

*диссертации на соискание ученой степени*
*кандидата физико-математических наук*



Москва 1981

Работа выполнена на Экономическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель — кандидат физико-математических наук доцент Е. Г. БЕЛОУСОВ

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук, профессор С. С. РЫШКОВ, кандидат физико-математических наук, доцент Ф. П. ВАСИЛЬЕВ

Ведущая организация — Московский физико-технический институт.

Защита состоится «__» _____ 1981 г. в ____ час. _____ мин. на заседании специализированного совета Д 002.32.02 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Вычислительном центре АН СССР (117333, г. Москва, ул. Вавилова, 40).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИ АН СССР им. В. А. Стеклова — г. Москва, ул. Вавилова, 42.

Автореферат разослан «_____» _________ 1981 г.

Ученый секретарь специализированного совета кандидат технических наук А. И. ЗЕНКИН

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Вопрос о структуре совокупности $\operatorname{integ} A$ всех целочисленных точек данного множества $A$ естественно возникает при исследовании свойств задачи целочисленного программирования:

$$\max_{x \in \operatorname{integ} A} f(x)$$

В частности, в связи с изучением условий ограниченности и разрешимости такой задачи рассматривался вопрос о расположении целых точек в неограниченных выпуклых множествах. Полученные результаты относятся в основном к следующим трем направлениям:

- оценки числа граней выпуклой оболочки множества $\operatorname{integ} M$ для многогранного множества $M$ [I)];
- оценки расстояния от начала координат до $\operatorname{integ} A$ [2)];
- условия равномерного распределения целочисленных точек в выпуклом множестве[3)].

В статье[3)]

– показано, что наличие в многогранном множестве $M$ внутренней целой точки влечет за собой равномерное распределение у це-

---

I) R.R. Meyer and M.L. Wage. On the polyhedrality of the convex hull of the feasible set of an integer program, SIAM J.Control and Optimization, v. 16, N 4, july 1978.

2) J. von zur Gathen and M.Sieveking. A bound on solutions of linear equalities and inaqualities. Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978), 155-158.

3) Е.Г. Белоусов. Некоторые вопросы теории выпуклых множеств и целочисленного программирования. В кн.: Исследования по математической экономии и смежным вопросам. М., 1972.

584

лых точек в $M$ (или, короче, равномерность множества $M$ ) в том смысле, что

$$\sup_{x\in M} \inf_{m\in \operatorname{integ} M} |x-m|<+\infty$$

– исследована структура неравномерных многогранных множеств в трехмерном пространстве;

– показано, что из наличия в выпуклом (не многогранном) множестве внутренней целой точки вообще говоря не следует его равномерность.

Диссертация является продолжением этой работы, а также работы[I)]. Основные задачи в ней следующие:

– установить необходимые и достаточные условия, связывающие равномерность многогранного множества с его положением относительно решетки всех целых точек евклидова пространства $E_n$;

– установить геометрические свойства выпуклого множества, приводящие к его неравномерности независимо от положения относительно решетки целых точек;

– установить, могут ли обладать такими свойствами выпуклые полиномиальные множества, задаваемые в виде

$$\{x\in E_n \mid f_i(x)\leq 0,\ 1\leq i\leq r\}$$

всюду выпуклыми полиномами $f_i$ ;

– распространить необходимые и достаточные условия равномерности многогранных множеств на более широкие классы полиномиальных множеств.

При решении этих общих задач в диссертации установлен ряд свойств выпуклых множеств и полиномов. Актуальность темы диссертации определяется также и тем, что эти свойства, полученные как вспо-

------------

I) Е.Г. Белоусов. Геометрия выпуклых полиномиальных множеств. В кн.: Вопросы экономико-математического моделирования. М., МГУ, 1973.



584



могательные, представляют и самостоятельный интерес (в частности оказываются тесно связанными с некоторыми задачами комбинаторной геометрии).

Целью работы является:

I. Выделение достаточно широкого класса выпуклых множеств таких, что наличие в множестве внутренней целочисленной точки влечет за собой равномерность распределения целочисленных точек в этом множестве.

2. Выяснение условий, при которых множества, заданные выпуклыми полиномами, относятся к такому классу.

3. Построение примера выпуклого полинома с неравномерным надграфиком.

4. Установление необходимого и достаточного условия равномерности многогранных и более общих выпуклых полиномиальных множеств.

Используемые методы. В работе рассматриваются выпуклые и выпуклые полиномиальные множества $n$ -мерного евклидова пространства $E_n$ и применяются методы выпуклой геометрии. Утверждения о расположении целых точек получены как следствие геометрических свойств множеств. Для доказательства отдельных утверждений используются расчеты на ЭВМ.

Научная новизна. В диссертационной работе впервые исследованы вопросы аппроксимации неограниченных выпуклых множеств их целочисленными подмножествами. В работе выделен класс выпуклых множеств, названных простыми, и показано, что наличие в простом множестве внутренней целочисленной точки влечет за собой его равномерность. Установлены достаточные условия простоты выпуклых полиномиальных множеств. Приводится пример полинома с непростым надграфиком. Построен пример выпуклого полинома с неравномерным надграфиком. Получено необходимое и достаточное условие равномерности множеств, заданных простыми полиномами (полиномами с простым надграфиком).

Научная ценность. Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы при решении широкого круга задач в области теории математического программирования, выпуклой и комбинаторной геометрии, исследования выпуклых полиномов и др.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на семинаре отдела геометрии Математического института АН СССР им. В.А. Стеклова (Москва, 1980); на семинаре кафедры вычислительной математики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 1980); на семинаре "Математическое программирование и математическая экономика" механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 1976-1977); на семинаре лаборатории проблем распознавания Вычислительного Центра АН СССР (Москва, 1979); на семинаре отделения кибернетики Института Математики СО АН СССР (Новосибирск, 1979);

на семинаре отдела прикладной математики ЦЭМИ АН СССР (Москва, 1976-1980).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 7 печатных работ общим объемом 7,1 п.л., из них 2 - без соавторов.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы (13 наименований), двух приложений и содержит 130 страниц машинописного текста.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении сформулирована основная задача работы, приведены примеры, поясняющие основные понятия и содержатся формулировки основных результатов.

Обозначим для произвольных множеств $A, B \subset E_n$

$$\gamma(A,B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} |x-y|$$







Будем говорить, что множество $A$ параллельно множеству $B$, (запись $A \parallel B$), если $\gamma(A,B) < +\infty$. Иными словами, $A \parallel B$, если существует число $\gamma$ такое, что для любого $x \in A$ найдется $y \in B$, для которого $|x-y| < \gamma$.

Равномерность $A$ означает, таким образом, что $A \parallel \operatorname{integ} A$.

Следующие примеры показывают, что возможны две причины неравномерности выпуклого множества: положение множества относительно решетки целых точек и его "неравномерная" геометрическая структура.

Пусть $A(x)$ - круглый цилиндр радиуса $\frac{1}{3}$ :

$$A(x) = \{y \in E_3 \,/\, |x-y| \le \tfrac{1}{3}\} + \{(0, t, t\sqrt{2}) \,/\, -\infty < t < +\infty\}$$

В зависимости от $x$ возможны два случая:

- множество $A(x)$ лежит строго между двумя плоскостями вида $H = \{x \,/\, x_1$ целое$\}$ или касается одной из них. Соответственно, $H \cap A(x) = \varnothing$ или $H \cap A(x) = \{x \,/\, x_1 = const, x_3 = \sqrt{2}\, x_2\}$. Поскольку, очевидно, $\operatorname{integ} A(x) \subset H \cap A(x)$, то в $A(x)$ содержится не более одной целой точки, и, следовательно, $A(x)$ неравномерно.

- $A(x)$ пересекает какую-либо плоскость $H = \{x \,/\, x_1$ целое$\}$. Нетрудно видеть, что полоса $A_1 = H \cap A(x)$ будет содержать бесконечно много целых точек и, более того, множество $A_1$, а с ним и $A(x)$ - равномерны.

В общем случае наличие целой точки и равномерность выпуклого множества $A$ связаны с положением $A$ относительно семейства минимальных (по включению) равномерных линейных многообразий $G$ таких, что $A \parallel G$. Эти многообразия названы в работе характеристическими для $A$.

Пусть теперь

$$A = \left\{x \in E_3 \,/\, x_3 \ge \frac{x_1^2}{x_2},\ \frac{1}{2} \le x_2 \le \frac{3}{2},\ x_3 \ge \frac{1}{\frac{3}{2} - x_2}\right\}$$

Множество $A$ неравномерно. Действительно, все точки из $integ\,A$ лежат на пересечении $A$ с его характеристическим многообразием $\{x/x_2=1\}$, то есть в множестве

$$A_1=\{x\,/\,x_3\geqslant x_1^2,\ x_2=1,\ x_3\geqslant 2\}$$

и если, например,

$$A_{\frac{4}{3}}=\{x\,/\,x_3\geqslant \frac{3x_1^2}{4},\ x_2=\frac{4}{3},\ x_3\geqslant 6\}$$

- сечение $A$ плоскостью $\{x\,/\,x_2=\frac{4}{3}\}$, то, очевидно, $A_{\frac{4}{3}}\nparallel A_1$ и, значит, $A\nparallel A_1$.

Можно показать, что $A$ не станет равномерным и при любом перемещении его в пространстве.

Причиной неравномерности являются здесь геометрические свойства: множество $A$ "сужается" при уменьшении $x_2$. Это сужение может быть описано двумя способами:

- сечения множества $A$ взаимно параллельными плоскостями не параллельны между собой;

- угол между поверхностью $A$ и плоскостью $\{x_2=const\}$ в точке их пересечения[I)] может быть как угодно мал в зависимости от выбора этой точки; поверхность "сплющивается".

В работе вводится класс множеств, свободных от этих свойств. Для таких множеств, названных <u>простыми</u>, равномерность определяется положением относительно их характеристических многообразий.

<u>Первая глава</u> посвящена геометрии неограниченных выпуклых множеств. Здесь вводится класс простых множеств и изучаются их свойства. Полученные результаты являются геометрической основой для изучения (в третьей главе) распределения целых точек в выпук-

-------------

I) Определяемый как угол между плоскостью $\{x\,/\,x_2=const\}$ и плоскостью, касательной к поверхности $A$ в этой точке.







лых множествах. Эти результаты представляют, видимо, и самостоятельный интерес; в частности, связь понятия простого множества с некоторыми задачами комбинаторной геометрии об освещении и о покрытии выпуклых множеств показана в приложении I.

Обозначим через $dA(B)$ сферическое изображение пересечения границы выпуклого множества $A$ с множеством $B$; иначе говоря, $dA(B)$ - совокупность внешних нормалей единичной длины к границе $fr\,A$ множества $A$ в точках $B\cap fr\,A$

<u>Теорема I</u>[I)]. Пусть $A$ - выпуклое множество, $c\in E_n$ и[2)]

$$\lambda^-=\inf\{cx\,/\,x\in A\}$$
$$\lambda^+=\sup\{cx\,/\,x\in A\}$$
$$\psi_c(\lambda)=\sup\{ca\,/\,a\in dA(\{x/cx=\lambda\})\}$$

Тогда функция $\psi_c(\lambda)$ монотонно возрастает при $\lambda^-\leqslant\lambda\leqslant\lambda^+$.

Выпуклое множество $A\subset E_n$ назовем простым, если при любом $c\in E_n\ (|c|=1)$ не существует $\lambda<\lambda^+$ такого, что $\psi_c(\lambda)=1$.

В работе установлен критерий простоты выпуклых множеств.

<u>Теорема 2.</u> Для того, чтобы выпуклое множество $A$ было простым, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух взаимно параллельных линейных многообразий $H_1$ и $H_2$, пересекающих $A$, но не касательных к $A$, выполнялось $(A\cap H_1)\parallel(A\cap H_2)$.

Отметим, что класс простых множеств достаточно широк - он включает, в частности, выпуклые ограниченные множества, многогранные множества, широкие подклассы выпуклых полиномиальных множеств.

<u>Во второй главе</u> рассматриваются всюду выпуклые полиномы и заданные ими полиномиальные множества.

------------------

I) Номера теорем в диссертации и автореферате не совпадают.

2) $ab$ - скалярное произведение векторов $a$ и $b$.

Полином $f(x),\ x\in E_n$ называется простым, если его надграфик $\{(x, x_{n+1})\in E_{n+1}\ /\ x_{n+1}\geqslant f(x)\}$ – простое множество. Основная задача главы – получить условия выпуклости (всюду) и простоты полиномов. Поскольку множество

$$\{x\ /\ f_i(x)\leqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant z\}$$

заданное всюду выпуклыми (простыми) полиномами $f_i$, является выпуклым (соответственно, простым), то тем самым мы получаем некоторые условия выпуклости и простоты полиномиальных множеств.

Совокупность векторов $s=(s_1,\dots,s_n)$ таких, что одночлен $x_1^{s_1}x_2^{s_2}\dots x_n^{s_n}$ входит в полином $f$ называется носителем $N(f)$ полинома $f$.

В главе найдено необходимое и достаточное условие того, чтобы набор $n$ -мерных целочисленных векторов был носителем некоторого выпуклого полинома – см. ниже теорему 3.

Обозначим для произвольного $N\subset \mathrm{integ}\, E_n$

$$N^J=\{m\in N\ /\ m_i\neq 0,\ i\in J\}$$
$$N_K=\{m\in N\ /\ m_i=0,\ i\in K\}$$
$$\tilde N=\{m\in N\ /\ m_i\equiv 0 \pmod 2),\ 1\leqslant i\leqslant n\}$$
$$\hat N=N\setminus\tilde N$$
$$\hat N^{\copyright}=\{m\in\hat N\ /\ m_i\geqslant 2\}$$

Будем использовать также комбинации этих обозначений, например

$$\tilde N_{ij}^{kl}=\{m\in\tilde N\ /\ m_i=m_j=0;\ m_k, m_l\neq 0\}$$

<u>Теорема 3.</u> Пусть $N$ – конечное множество целых точек с неотрицательными компонентами. Для того, чтобы существовал всюду выпуклый полином $f$ такой, что $N=N(f)$, необходимо и достаточно, чтобы[1].

$$\hat N^{\copyright}\subset Co(\tilde N^i)\qquad 1\leqslant i<j\leqslant n$$
$$2N^{ij}\subset Co((\tilde N^i+\tilde N_i^j)\cup(\tilde N^j+\tilde N_j^i))$$

---

1) $Co\,A$ – выпуклая оболочка множества $A$.





<u>Следствие</u>. Если полином $f$ выпуклый, то для любой точки $(s_1,s_2,\dots,s_n)\in N(f)$ и чисел $p_1,p_2,\dots,p_n$ – степеней $f$ по $x_1,x_2,\dots,x_n$ – выполняется $\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{p_i}\leqslant 1$.

Во второй главе установлено довольно общее структурное достаточное условие простоты выпуклого полинома (теорема 4).

Пусть $p_i$ – степени полинома $f(x_1,\dots,x_n)$ по $x_i$. Главной формой порядка $s$ выпуклого полинома $f$ назовем сумму всех одночленов из $f$, имеющих порядок $s$ и содержащих только те из $x_i$, для которых $p_i=s$. Будем говорить, что всюду выпуклый полином $f$ имеет с п е ц и а л ь н ы й  в и д, если каждая из его главных форм строго выпукла по входящим в нее переменным. Всякий выпуклый полином может быть приведен к специальному виду (возможно, неоднозначно) некотерым линейным преобразованием.

<u>Теорема 4</u>. Пусть для выпуклого всюду полинома $f$ существует специальный вид $\varphi$ такой, что для любого $(s_1,\dots,s_n)\in N(\varphi)$ такого, что $s_1+\dots+s_n\geqslant 2$ и любого номера $k\ (1\leqslant k\leqslant n)$ такого, что $s_k>0$ выполняется неравенство $\sum_{i\neq k}\frac{s_i}{p_i-1}\leqslant 1$. Тогда полином $f$ – простой.

Из этого утверждения следует, в частности, что простыми являются выпуклые сепрабельные полиномы[1], суммы выпуклых форм и выпуклые полиномы, нелинейные только по двум переменным.

В главе доказано, что минимальная степень непростого выпуклого полинома от трех переменных равна 16; строится пример конкретного непростого полинома минимальной степени:

$$2\cdot 10^{13}(x_1^{16}+x_2^{8}+x_3^{6}+x_1^{2}+x_2^{2}+x_3^{2})+$$
$$+\ 2\cdot 10^{7}(x_2^{2}x_3^{4}+x_1^{4}x_3^{4}+x_1^{4}x_2^{6}+x_1^{2}x_2^{6})+$$
$$+\ 20x_1^{2}x_2^{4}x_3^{2}+x_1x_2^{3}x_3^{3}$$

---

1) То есть представимые в виде $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i)$, где $f_i(x_i),\ 1\leqslant i\leqslant n$ – выпуклые полиномы от $x_i$.

В третьей главе содержатся основные результаты о расположении целочисленных точек в выпуклых неограниченных множествах.

В первом параграфе приведено следующее необходимое и достаточное условие существования целой точки в открытом выпуклом множестве, обобщающее теорему Кронекера о совместных приближениях.

Теорема 5. Открытое выпуклое множество $A$ содержит целую точку тогда и только тогда, когда $A$ пересекает одно из своих характеристических многообразий.

Это утверждение может быть переформулировано так.

Теорема 6. Пусть $A$ - открытое выпуклое множество и $c_1,\dots,c_r$ - базис решетки

$$\{c \in integ\, E_n \mid \sup_{x\in A} |cx| < +\infty\}$$

Множество $A$ содержит целую точку в том и только том случае, когда для некоторого $a \in A$ все скалярные произведения $c_1 a,\dots,c_r a$ - целые.

Следствие. Выпуклое множество, содержащее внутреннюю, но не содержащее внутренней целой точки, лежит между двумя равномерными взаимно параллельными гиперплоскостями.

Второй параграф третьей главы содержит условия равномерности выпуклых множеств.

Теорема 7. Если выпуклое множество равномерно, то оно содержит целую точку, внутреннюю относительно одного из своих характеристических многообразий.

Необходимое условие этой теоремы является достаточным для равномерности многогранных множеств и множеств вида $A_0+K$, где $A_0$ - ограниченное выпуклое множество и $K$ - выпуклый конус [I]. В диссертации показано, что это условие достаточно для равномерности множеств из другого расширения класса многогранных множеств - множеств, заданных простыми полиномами.



Теорема 8. Если множество $A=\{x \mid f_i(x) \leqslant 0,\ 1\leqslant i \leqslant r\}$ задано простыми полиномами $f_i$, то для равномерности необходимо и достаточно, чтобы $A$ имело внутреннюю точку относительно одного из своих характеристических многообразий.

Построенный пример показывает, что аналогичное утверждение, вообще говоря, не верно для произвольного простого множества. Тем не менее справедлива следующая

Теорема 9. Если простое множество содержит внутреннюю целую точку, оно равномерно.

Теорема I0. Всякое непростое выпуклое множество $A$ можно разбить некоторой гиперплоскостью на две части $A_1$ и $A_2$ так, что среди множеств, конгруэнтных $A_1$ либо $A_2$, имеется неравномерное.

В третьем параграфе третьей главы рассматривается распределение целочисленных точек в множествах заданных простыми полиномами в $E_n$ при $n \leqslant 5$ и устанавливаются следующие основные результаты.

Теорема II. Пусть множество $A \subset E_4$ представимо в виде

$$A=\{x \mid f_i(x) \leqslant 0,\ 1\leqslant i \leqslant r\}$$

где $f_i$ - простые полиномы. Тогда три следующие утверждения равносильны:

а) $A$ равномерно;

б) $A \parallel Co(integ\, A)$;

в) $\{c \mid \sup_{x\in A} cx < +\infty\} = \{c \mid \sup_{x\in integ\, A} cx < +\infty\}$

Строятся примеры, показывающие, что в $E_5$ эти утверждения попарно не эквивалентны. Параграф заканчивается примером всюду выпуклого полинома, надграфик которого – неравномерное множество:

$$10^{12}\left(\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^{74}+x_2^{24}+x_3^{8}+\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^{2}+x_2^{2}+x_3^{2}\right)+$$
$$+10^{6}\left(\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^{64}x_2^{2}+\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^{40}x_3^{2}+\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^{2}x_2^{20}+\right.$$
$$\left.+\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^{2}x_3^{6}+x_2^{10}x_3^{4}+x_2^{16}x_3^{2}+x_2^{4}x_3^{6}\right)+$$
$$+\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^{2}x_2^{10}x_3^{4}$$

В приложении I рассмотрена связь понятия простого множества с некоторыми задачами комбинаторной геометрии.

В приложении 2 содержится программа (на языке $PL/1$ ) нахождения непростого полинома от трех переменных, минимального по степени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы сводятся к следующему:

I. Работа посвящена изучению особенностей структуры целочисленных подмножеств неограниченных выпуклых множеств; при изучении этих вопросов получены также результаты о свойствах выпуклых множеств и полиномов.

2. В работе выделен достаточно широкий класс выпуклых множеств, названных простыми, и доказано, что наличие в простом множестве $A$ внутренней целочисленной точки влечет за собой равномерность распределения целочисленных точек в множестве $A$ в том смысле, что

$$\sup_{x\in A}\ \inf_{m\in \operatorname{integ} A}|x-m|<+\infty ,$$

где $\operatorname{integ} A$ – совокупность всех целочисленных точек множества $A$.

3. Установлено, что простыми являются множества в $E_3$ , заданные в виде



$$\{x \mid f_i(x)\leqslant 0 ,\ 1\leqslant i\leqslant z\}$$

конечным числом всюду выпуклых полиномов $f_i$. В $E_4$ такие множества являются простыми, если они заданы полиномами степени меньшей, чем I6. Приводится пример выпуклого полинома от трех переменных степени I6 с непростым надграфиком. Установлено достаточное условие простоты полиномиального множества в $E_n$ для произвольного $n$ .

4. Построен пример выпуклого полинома (от трех переменных, степени 74) с неравномерным надграфиком.

5. Получено необходимое и достаточное условие наличия целочисленной точки в открытом выпуклом множестве, обобщающее теорему Кронекера о совместных приближениях.

6. Показано, что для равномерности распределения целочисленных точек в многогранном множестве $M\subset E_4$ необходимо и достаточно, чтобы любая линейная функция была одновременно ограничена (неограничена) сверху на $M$ и на целых точках из $M$ . Построен пример, показывающий, что в $E_5$ это утверждение, вообще говоря, не верно.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. О распределении целочисленных точек в некоторых классах выпуклых множеств (в соавторстве). – В кн.: Вопросы экономико-математического моделирования. Изд-во МГУ, I972 (I,6 п.л.).

2. О существовании и особенностях распределения целочисленных точек в выпуклых множествах (в соавторстве). – В кн.: Исследования по математической экономии и смежным вопросам. Изд-во МГУ, I973 (0,8 п.л.).

3. О регулярности задачи целочисленного программирования. - В кн.: Вопросы экономико-математического моделирования, Изд-во МГУ, I973 (0,8 п.л.).

4. Об одном обобщении теоремы о представлении. - В кн.: Проблемы внедрения новых методов в планирование и управление общественным производством. Изд-во МГУ, I976 (0,2 п.л.).

5. Некоторые условия равномерного распределения (в соавторстве). - В кн.: Проблемы внедрения новых методов в планирование и управление общественным производством. Изд-во МГУ, I976 (I п.л.).

6. Распределенность целочисленных точек в выпуклых множествах (в соавторстве). - В кн.: Белоусов Е.Г. Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. Изд-во МГУ, I977 (2,4 п.л.).

7. Необходимые и достаточные условия равномерности выпуклых множеств (в соавторстве). - В кн.: Исследования по математической экономии и смежным вопросам. Изд-во МГУ, I979 (0,8 п.л.).

Формат бумаги 60x90 I/I6

В печать от 21.01.8I Т-03704 Тираж I25 экз.

Печ.л. I,0 Уч.-изд.л. 0,67 Заказ 584

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский проспект, 403